

TOPOLOGIE ALGÈBRE. — *Sur les complexes croisés d'homotopie associés à quelques espaces filtrés.* Note (*) de Ronald Brown et Philip J. Higgins, présentée par M. Henri Cartan.

Une généralisation du théorème de van Kampen est obtenue dans toutes les dimensions. On associe un carré co-cartésien de complexes croisés à certains carrés cocartésiens d'espaces filtrés.

The van Kampen Theorem is generalised to all dimensions by associating a pushout of crossed complexes with certain pushouts of filtered spaces.

Nous donnons ici les applications des résultats algébriques décrits dans (*).

La catégorie \mathcal{C} des complexes croisés (sur groupoïdes) est définie dans (*).

Soit $X : X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n \subset \dots$ une filtration d'un espace X par des sous-espaces. Pour simplifier, nous supposons ici que X_0 est discret. Nous définissons le *complexe croisé d'homotopie* $C = \pi_*(X)$ de cette filtration à l'aide des formules : $C_0 = X_0, C_1 = \pi X_1 X_0$ [le groupoïde fondamental de X_1 sur X_0 comme défini dans (2)], et pour chaque $p \in C_0$ et $n \geq 2, C_n(p) = \pi_n(X_n, X_{n-1}, p)$. L'opération de C_1 sur C_n est standard, et les applications du bord $\delta : C_n \rightarrow C_{n-1}$ sont celles de la suite d'homotopie du triplet (X_n, X_{n-1}, X_{n-2}) . Il est clair que π_* est un foncteur de la catégorie des espaces filtrés vers \mathcal{C} . En effet, $\pi_*(X)$ est l'exemple fondamental d'un complexe croisé [avec une autre terminologie $\pi_*(X)$ a été considéré par Blakers dans (1) et Whitehead dans (5)].

THÉORÈME PRINCIPAL. — Supposons que le diagramme commutatif d'espaces filtrés

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{f} & U \\ \downarrow i & & \downarrow \bar{i} \\ V & \xrightarrow{\bar{f}} & X \end{array}$$

satisfasse à l'une des deux hypothèses suivantes :

HYPOTHÈSE A. — Les applications i, f, \bar{i}, \bar{f} sont des inclusions de sous-espaces, $X = \text{Int } U \cup \text{Int } V$ et, pour tous $n \geq 0$, on a $Q_n = Q \cap X_n$, où $Q = U, V, W$.

HYPOTHÈSE B. — Pour tous $n \geq 0$, les applications $i_n : W_n \rightarrow V_n$ sont des cofibrations fermées et X_n est l'espace d'adjonction $U_n \bigcup_{f_n} V_n$.

Supposons aussi que, pour tous $n \geq 1, r > n, Q = U, V$ ou W et $p \in Q_0$ les applications

$$\begin{aligned} (\star) \quad & \pi_n(Q_n, Q_{n-1}, p) \rightarrow \pi_n(Q_r, Q_{n-1}, p) \\ & \pi_0(Q_0) \rightarrow \pi_0(Q_n) \end{aligned}$$

induites par l'inclusion soient surjectives.

Alors, le diagramme induit

$$\begin{array}{ccc} \pi_*(W) & \rightarrow & \pi_*(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_*(V) & \rightarrow & \pi_*(X) \end{array}$$

est cocartésien dans la catégorie des complexes croisés.

Remarque 1. — L'hypothèse \mathcal{B} et les hypothèses de connectivité (\star) sont satisfaites si U, V, W sont des CW-complexes avec la filtration par les squelettes, $i : W \rightarrow V$ est l'inclusion d'un sous-complexe, $f : W \rightarrow U$ est cellulaire, et X est l'espace d'adjonction $U \cup_f V$ avec sa structure standard comme CW-complexe.

Remarque 2. — Ce théorème contient la version groupoïdale du théorème de van Kampen [8.4.2 de (2)] et aussi du théorème C de (3).

Remarque 3. — Le théorème de réunion (théorème B) de (3) possède une généralisation analogue aux espaces filtrés.

Les corollaires utiles qui suivent, sont valables sous l'une ou l'autre des hypothèses \mathcal{A} ou \mathcal{B} . Dans chaque cas on prend pour X_0 le point de base $\{p\}$; nous ne ferons plus mention de p .

COROLLAIRE 1. — Soit $n > 2$. Si, pour $Q = U, V, W$ les espaces Q, Q_1 sont connexes par arcs et $\pi_i(Q, Q_1) = 0$ pour $1 \leq i \leq n-1$, alors le diagramme induit

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(W, W_1) & \rightarrow & \pi_n(U, U_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_n(V, V_1) & \rightarrow & \pi_n(X, X_1) \end{array}$$

est un carré cocartésien de modules sur le carré cocartésien de groupes

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(W_1) & \rightarrow & \pi_1(U_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(V_1) & \rightarrow & \pi_1(X_1). \end{array}$$

On l'obtient à partir du théorème principal en prenant $X_i = X_1, 1 \leq i \leq n-1, X_j = X, j \geq n$.

COROLLAIRE 2. — Soit $n > 2$. Soit U, V, W connexes par arcs et supposons $\pi_i(V, W) = 0, 1 \leq i \leq n-1$. Alors l'application d'excision $\pi_n(V, W) \rightarrow \pi_n(X, U)$ détermine $\pi_n(X, U)$ comme le module induit $\lambda_* \pi_n(V, W)$, où $\lambda : \pi_1(W) \rightarrow \pi_1(U)$ est induit par inclusion.

Cela résulte du corollaire 1 en prenant $X_1 = U$ [dans (3) les résultats sont encore valables pour $n = 2$ mais en remplaçant « module » par « module croisé »].

La démonstration du théorème principal utilise la théorie des ω -groupoïdes décrite dans (4).

Nous considérons le n -cube I^n avec sa structure cellulaire standard, et la filtration de I^n par les squelettes $I^{n,r}$. Soit $R(X)$ le complexe cubique qui, dans la dimension n , est l'ensemble des applications filtrées $I^n \rightarrow X$. Les opérations standards sur les cubes permettent de définir n opérations $+$ sur $R(X)$ dans la dimension n , et aussi les connexions $\Gamma_i : R_n \rightarrow R_{n+1}$.

Soit $\rho(X)$ le quotient de $R(X)$ par la relation suivante : $x, y : I^n \rightarrow X$ sont f -équivalents si x est homotope à y par une homotopie $h_t, t \in I$, telle que chaque h_t soit une application filtrée $I^n \rightarrow X$.

La démonstration de la proposition suivante est technique, mais le résultat semble essentiel pour la démonstration de la proposition 2.

PROPOSITION 1. — *L'application quotient $p : R(X) \rightarrow \rho(X)$ est une fibration au sens de Kan.*

On a démontré en (*) qu'il existe un foncteur $\gamma : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{C}$ de ω -groupoïdes à complexes croisés.

PROPOSITION 2. — (i) *Les opérations $+$, Γ_i sur $R(X)$ induisent sur $\rho(X)$ une structure de ω -groupoïde.*

(ii) *Le complexe croisé $\gamma\rho(X)$ est naturellement isomorphe à $\pi_*(X)$.*

(iii) *Un élément \bar{x} de $\rho(X)_n$ est mince [au sens de (*)] si et seulement s'il a un représentant $x : I^n \rightarrow X$ tel que $x(I^n) \subset X_{n-1}$.*

On démontre maintenant le théorème principal en montrant d'abord que sous ces conditions le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \rho(W) & \rightarrow & \rho(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \rho(V) & \rightarrow & \rho(X) \end{array}$$

est un carré cocartésien dans la catégorie des ω -groupoïdes. La démonstration suit les mêmes idées générales que celles du théorème de réunion de (3), mais la formule explicite pour le lemme d'addition d'homotopie est remplacée par l'emploi d'éléments minces.

(*) Séance du 14 novembre 1977.

(1) A. L. BLAKERS, *Ann. Math.*, 49, 1948, p. 428-461.

(2) R. BROWN, *Elements of Modern Topology*, McGraw Hill, Maidenhead, 1968.

(3) R. BROWN et P. J. HIGGINS, *On the Connection between the Second Relative Homotopy Groups of Some Related Spaces* [*Proc. London Math. Soc.*, (3), 36, 1978].

(4) R. BROWN et P. J. HIGGINS, *Comptes rendus*, 285, série A, 1977, p. 997.

(5) J. H. C. WHITEHEAD, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55, 1949, p. 453-496.

R. B. :

*School of Mathematics and Computer Science,
University College of North Wales,
Bangor LL57 2UW,
Gwynedd,
U.K.;*

P. J. H. :

*Department of Mathematics,
King's College,
Strand,
London,
WC2R 2LS.*